

# Về bài toán điều khiển phản hồi cho ánh xạ Hénon

Nguyễn Như Hiếu<sup>1</sup>, Phạm Ngọc Chung<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Viện Cơ học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 264 Đội Cấn, Ba Đình, Hà Nội

<sup>2</sup>Trường Đại học Mỏ - Địa chất, Đức Thắng, Bắc Từ Liêm, Hà Nội

\*Email: nhuhiu1412@gmail.com

**Tóm tắt:** Bài toán điều khiển hệ hỗn độn có tiềm năng ứng dụng lớn trong nhiều ngành khoa học và kỹ thuật khác nhau. Trong bài báo này, các tác giả nghiên cứu về bài toán điều khiển phản hồi cho ánh xạ rời rạc Hénon. Các tác giả đã đề xuất điều kiện ổn định hóa cho hệ tại điểm cố định 1-tuần hoàn và minh họa bằng kết quả số cho kết quả lý thuyết thu được.

**Từ khóa:** Ánh xạ Hénon, điều khiển phản hồi, hỗn độn, ổn định, 1-tuần hoàn

## 1. Giới thiệu

Ánh xạ Hénon là một ánh xạ rời rạc, lần đầu tiên được nghiên cứu bởi Hénon năm 1976 [1]. Ánh xạ này được nghiên cứu rộng rãi trong các hệ động lực dạng rời rạc hóa [2]. Người ta quan sát thấy rằng ứng xử hỗn độn của một hệ động lực có thể xảy ra nếu hệ có một biểu diễn phi tuyến và hệ có diễn biến từ một trạng thái ban đầu nào đó. Đối với hệ Hénon, đáng chú ý của nó được nghiên cứu kỹ và Hénon [1] đã tìm thấy rằng với một số giá trị của tham số hệ, trạng thái hỗn độn là có thể hiện hữu. Trong thực tế trạng thái hỗn độn thường đại diện cho tính chất “xấu đi” của hệ động lực vì lúc này hệ ứng xử một cách không bảo trước và thường gây ra một số hậu quả không mong đợi; chẳng hạn như dao động của một kết cấu cầu nếu rơi vào trạng thái hỗn độn sẽ dẫn đến rất nguy hiểm và kém an toàn cho phương tiện giao thông đi qua nó [3]. Một giải pháp khử hỗn độn của hệ là đưa vào các hàm điều khiển, từ đó làm ổn định hóa hệ đến một trạng thái an toàn hơn [4-6]. Một ví dụ ổn định hóa hệ Hénon được nghiên cứu bởi Wang và đồng nghiệp [7] bằng cách đưa vào hàm điều khiển phản hồi và chứng minh tính ổn định của hệ tại các điểm p-tuần hoàn không ổn định.

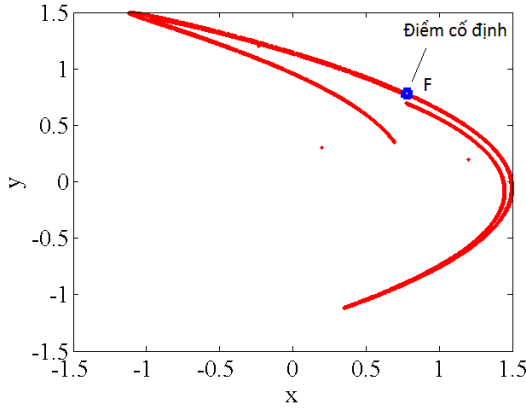
Trong các hệ động lực rời rạc, đáng chú ý p-tuần hoàn thường xuất hiện, trong đó đáng chú ý 1-tuần hoàn là đối tượng được quan tâm hơn cả. Mục đích của nghiên cứu này là đưa ra một tiêu chuẩn ổn định hóa cho một lớp các hàm điều khiển của hệ Hénon nhằm đưa trạng thái hệ từ không ổn định tại vị trí điểm cố định 1-tuần hoàn sang trạng thái mới ổn định hóa. Các kết quả tính toán số được minh họa cho hàm điều khiển phản hồi thu được từ lý thuyết.

## 2. Hệ Hénon có điều khiển

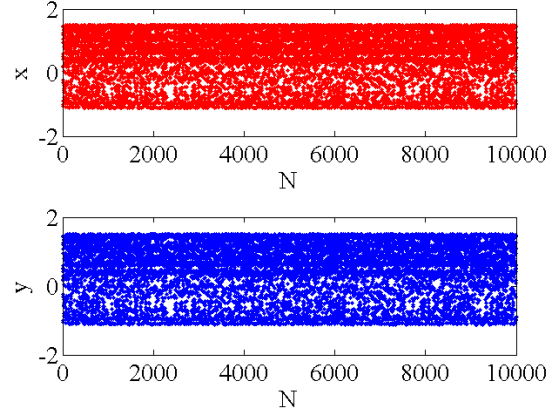
Hệ Hénon được biểu diễn như sau [1,7]

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a - x_n^2 + by_n, \\y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}\tag{1}$$

trong đó  $a, b$  là các tham số hệ. Chọn vị trí ban đầu  $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$ , từ Hình 1 có thể thấy rằng, khi  $a = 1.152$ ,  $b = 0.3$ , hệ Hénon (1) có ứng xử hỗn độn. Điểm F được gọi là điểm cố định 1-tuần hoàn của hệ nếu nó là nghiệm của hệ  $x_{n+1} = x_n$ ,  $y_{n+1} = y_n$  khi  $n$  trở nên rất lớn. Điểm này cũng được minh họa trên Hình 1. Hình 2 minh họa sự phân tán của điểm  $(x_n, y_n)$  theo số bước lặp  $N$ . Ở đây ta lấy  $N = 10000$ .



Hình 1. Minh họa dáng điệu hỗn độn của hệ Hénon



Hình 2. Sự phân tán của  $x(n)$ ,  $y(n)$  theo số điểm lặp  $N$

Hệ Hénon có điều khiển được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a - x_n^2 + by_n + u_1, \\ y_{n+1} &= x_n + u_2, \end{aligned} \quad (2)$$

trong đó  $u_1 = u_1(x_n, y_n, \hat{x}_1, \hat{y}_1)$ ,  $u_2 = u_2(x_n, y_n, \hat{x}_1, \hat{y}_1)$  là các hàm điều khiển. Ta phải lựa chọn các hàm này sao cho các điểm cố định 1-tuần hoàn của hệ là ổn định. Trong nghiên cứu của Wang và đồng nghiệp [7], họ chọn hàm điều khiển trong trường hợp 1-tuần hoàn sau đây:

$$u_1 = k_1(x_n - \hat{x}_1), u_2 = k_2(y_n - \hat{y}_1), \quad (3)$$

trong đó  $k_1 = k_2 = k$  là các hệ số phản hồi. Ta có định lý sau đây cho trường hợp 1-tuần hoàn.

**Định lý 1.** Hệ (2) sẽ là ổn định tại điểm cố định 1-tuần hoàn nếu tất cả các giá trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2$  của ma trận Jacobian tại điểm này thỏa mãn:

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i=1, 2). \quad (4)$$

Chứng minh của định lý này có thể xem trong tài liệu tham khảo của Michel và đồng nghiệp [8]. Sau đây các tác giả bài báo sẽ đưa ra một tiêu chuẩn mới của hàm điều khiển  $u_1, u_2$  để làm ổn định hệ Hénon tại điểm cố định 1- tuần hoàn. Ta có định lý sau đây:

**Định lý 2.** Nếu hàm điều khiển  $u_1(x, y, \hat{x}_1, \hat{y}_1)$  và  $u_2(x, y, \hat{x}_1, \hat{y}_1)$  thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

$$(i) \quad \left[ 4 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} - 2\hat{x}_1 \right)^2 \right]_{(\hat{x}_1, \hat{y}_1)} = 0, \quad (5)$$

$$(ii) \quad -2 + 2\hat{x}_1 + 2\sqrt{b} < \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{(\hat{x}_1, \hat{y}_1)} < 2 + 2\hat{x}_1 - 2\sqrt{b}, \quad (6)$$

thì hệ Hénon ổn định tại điểm cố định 1- tuần hoàn  $(\hat{x}_1, \hat{y}_1)$ .

Định lý trên cho ta một lớp các hàm điều khiển  $u_1, u_2$  thỏa mãn tính chất ổn định của hệ Hénon tại điểm cố định 1-tuần hoàn. Từ đây ta có thể chọn dạng cụ thể của các hàm này theo mong muốn nào đó. Chứng minh của định lý được trình bày dưới đây.

### Chứng minh

Như đã nói ở trên khi không chịu một tác động điều khiển nào, với  $a = 1.152$ ,  $b = 0.3$ , hệ (1) có ứng xử hỗn độn. Tại điểm cố định 1-tuần hoàn  $(\hat{x}_1, \hat{y}_1)$ , ma trận Jacobian của hệ (2) có dạng sau:

$$J_{(\hat{x}_1, \hat{y}_1)} = \begin{pmatrix} -2\hat{x}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} & b + \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ 1 & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\hat{x}_1, \hat{y}_1)} = \begin{pmatrix} -2\hat{x}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{(\hat{x}_1, \hat{y}_1)} & b + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)_{(\hat{x}_1, \hat{y}_1)} \\ 1 & \left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)_{(\hat{x}_1, \hat{y}_1)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Phương trình đặc trưng ứng với ma trận (7) là:

$$\lambda^2 + \left(2\hat{x}_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\lambda + \frac{\partial u_2}{\partial y} \left(-2\hat{x}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - \left(b + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = 0. \quad (8)$$

Biệt thức  $\Delta_\lambda$  của phương trình (8) là

$$\Delta_\lambda = 4 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} - 2\hat{x}_1\right)^2 + 4b. \quad (9)$$

Nếu điều kiện (5) được thỏa mãn thì  $\Delta_\lambda = 2\sqrt{b} > 0$ , khi đó phương trình đặc trưng (9) có hai nghiệm sau:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} - 2\hat{x}_1 + 2\sqrt{b} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} - 2\hat{x}_1 - 2\sqrt{b} \right). \quad (10)$$

Dễ dàng thấy rằng với điều kiện (6) thì :

$$-1 < \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} - 2\hat{x}_1 + 2\sqrt{b} \right) < 1, \quad -1 < \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} - 2\hat{x}_1 - 2\sqrt{b} \right) < 1, \quad (11)$$

hay  $|\lambda_i| < 1$  ( $i = 1, 2$ ). Do đó hệ (2) ổn định tại điểm cố định 1-tuần hoàn theo Định lý 1.

Chú ý rằng việc chọn điều kiện (5) làm cho biệt thức  $\Delta_\lambda$  từ biểu thức (9) trở nên đơn giản và không phụ thuộc vào các điểm cố định. Mặt khác việc chọn này có ưu điểm là có thể dễ dàng giải ra các nghiệm của phương trình đặc trưng với các biểu thức đơn giản. Nhược điểm là việc lựa chọn này đã làm giảm đáng kể các lớp hàm mà ta có thể tổng quát được cho bài toán, bao gồm cả kết quả đã biết trong nghiên cứu của Wang và đồng nghiệp [7]. Điều kiện (6) đảm bảo rằng miền giá trị của các nghiệm của phương trình đặc trưng thỏa mãn Định lý 1, tức là đảm bảo tính ổn định của hệ tại điểm cố định 1-tuần hoàn. Điểm cố định này được xem là có thể tìm được từ hệ Hénon không có điều khiển. Cận trên và cận dưới của điều kiện (6) được thỏa mãn nếu  $0 < b < 1$ .

### 3. Minh họa hệ Hénon có điều khiển

Trong phần này ta sẽ xét một trường hợp cụ thể của hệ Hénon có điều khiển. Đối với hệ Hénon (1) với  $a = 1.152$ ,  $b = 0.3$ , ta dễ dàng thu được hai điểm cố định không ổn định  $(0.7789, 0.7789)$  và

$(-1.4789, -1.4789)$ . Sau đây ta sẽ chọn điểm cố định  $F(0.7789, 0.7789)$  như ví dụ để minh họa tính toán. Ta lựa chọn hai hàm điều khiển sau đây thỏa mãn điều kiện (5) và (6) của [Định lý 2](#) :

$$u_1 = \frac{\beta}{2}(x - \hat{x}_1) + \frac{1}{2}(x - \hat{x}_1)^2, \quad u_2 = \left(\frac{\beta}{2} - \hat{x}_1\right)(y - \hat{y}_1), \quad (12)$$

trong đó hệ số  $\beta$  thỏa mãn  $\beta \in (-2 + 2\hat{x}_1 + 2\sqrt{b}, 2 + 2\hat{x}_1 - 2\sqrt{b})$ . Ta sẽ chứng minh trực tiếp tính ổn định của hệ tại điểm cố định. Hệ Hénon có điều khiển lúc này sẽ là :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a - x_n^2 + by_n + \frac{\beta}{2}(x_n - \hat{x}_1) + \frac{1}{2}(x_n - \hat{x}_1)^2, \\ y_{n+1} &= x_n + \left(\frac{\beta}{2} - \hat{x}_1\right)(y_n - \hat{y}_1), \end{aligned} \quad (13)$$

trong đó  $a, b$  được chọn như ở trên. Jacobian tại điểm cố định không ổn định  $(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = (0.7789, 0.7789)$  là :

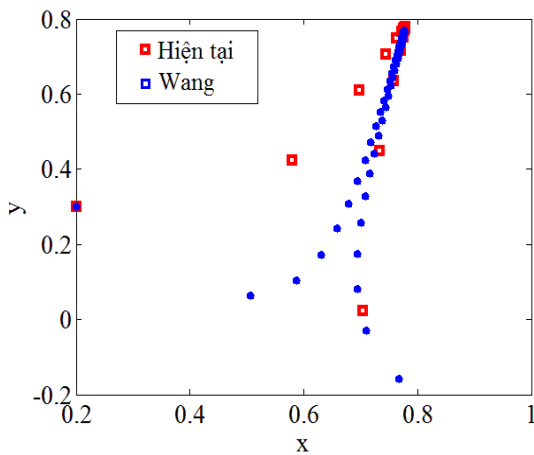
$$J(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{2} - x & b \\ 1 & \frac{\beta}{2} - \hat{x}_1 \end{bmatrix}_{(\hat{x}_1, \hat{y}_1)} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{2} - \hat{x}_1 & b \\ 1 & \frac{\beta}{2} - \hat{x}_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Phương trình đặc trưng thu được ứng với Jacobian trên là :

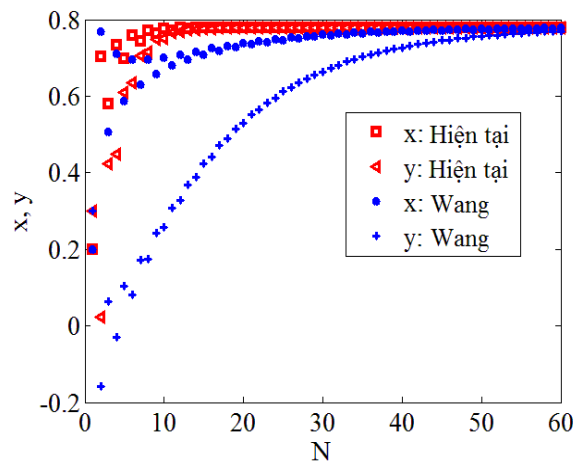
$$\lambda^2 - 2\left(\frac{\beta}{2} - \hat{x}_1\right)\lambda + \left(\frac{\beta}{2} - \hat{x}_1\right)^2 - b = 0. \quad (15)$$

Phương trình (15) có hai nghiệm thực phân biệt là :

$$\lambda_1 = \frac{\beta}{2} - \hat{x}_1 - \sqrt{b}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta}{2} - \hat{x}_1 + \sqrt{b} \quad (16)$$



Hình 3. Điểm cố định F của hệ có điều khiển



Hình 4. Sự hội tụ về điểm cố định theo số phép lặp N

Từ điều kiện  $\beta \in (-2 + 2\hat{x}_1 + 2\sqrt{b}, 2 + 2\hat{x}_1 - 2\sqrt{b})$ , ta có thể thấy rằng :

$$+) \text{ Cận dưới của } \lambda_1 : \lambda_1 = \frac{\beta}{2} - \hat{x}_1 - \sqrt{b} > -1 + \hat{x}_1 + \sqrt{b} - \hat{x}_1 - \sqrt{b} = -1$$

$$+) \text{ Cận trên của } \lambda_1 : \lambda_1 = \frac{\beta}{2} - \hat{x}_1 - \sqrt{b} < (1 + \hat{x}_1 - \sqrt{b}) - \hat{x}_1 - \sqrt{b} < (1 + \hat{x}_1 + \sqrt{b}) - \hat{x}_1 - \sqrt{b} = 1$$

Tức là ta đã chỉ ra  $|\lambda_1| < 1$ . Tương tự ta cũng có  $|\lambda_2| < 1$ . Theo Định lý 1 thì hệ Hénon là ổn định tại điểm  $(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = (0.7789, 0.7789)$ .

**Hình 3** là kết quả của ánh xạ Hénon có hàm điều khiển (13). Những điểm có dạng hình vuông màu đỏ là kết quả tính toán hiện tại, trong khi đó điểm có dạng hình tròn màu xanh biểu diễn kết quả thu được từ hàm điều khiển do Wang và đồng nghiệp [7] đề xuất [xem phương trình (3)]. Ở đây tham số  $\beta$  được lấy là  $\beta = 2.5$  và các tham số  $k_1, k_2$  của Wang được lấy là  $k_1 = k_2 = k = 0.75$ . Ta có thể thấy rằng với ánh xạ mới thu được, các điểm  $(x_n, y_n)$  hội tụ về điểm  $F(0.7789, 0.7789)$ . **Hình 4** minh họa so sánh sự hội tụ này theo số bước lặp  $N$  từ hàm điều khiển hiện tại và hàm điều khiển của Wang. Với tham số đã chọn, từ **Hình 4** có thể thấy rằng kết quả hiện tại hội tụ nhanh về điểm cố định hơn so với kết quả của Wang nên số điểm phân tán trên **Hình 3** ứng với kết quả hiện tại là không nhiều. Các so sánh hai hàm điều khiển trên **Hình 4** chỉ mang tính chất tương đối bởi vì các tham số và cấu trúc của các hàm điều khiển là khác nhau; tuy nhiên có thể quan sát sự hội tụ nhanh của hàm điều khiển hiện tại là do tính chất phụ thuộc bậc hai của sai số giữa điểm quỹ đạo và điểm cố định, trong khi đó kết quả của Wang chỉ là phụ thuộc bậc nhất. Như vậy Hệ Hénon đang chuyển động hỗn độn, sau khi có điều khiển hệ trở thành ổn định hóa và hội tụ về điểm cố định.

#### 4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, các tác giả đã đề xuất một điều kiện ràng buộc mới cho hàm điều khiển của ánh xạ Hénon. Điều kiện này nhằm ổn định hóa điểm cố định 1-tuần hoàn của hệ. Để minh họa tính ổn định, một dạng cụ thể của hàm điều khiển được lấy làm ví dụ tính toán. Kết quả chỉ ra rằng với hàm điều khiển lựa chọn, ánh xạ Hénon biến đổi từ hình thái hỗn độn khi chưa có điều khiển sang hình thái ổn định hóa khi có điều khiển. Đặc điểm này là khá hữu ích trong các ứng dụng thực tế bởi vì khi hệ bị rơi vào trạng thái hỗn độn thường là trạng thái « xấu », và khi có điều khiển trở lại, trạng thái « tốt » sẽ được phục hồi.

#### Tài liệu tham khảo

- [1] M. Hénon. A two-dimensional mapping with strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, **50**(1), (1976), pp. 69–77.
- [2] G. Chen, X. Dong. *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Application*. Singapore, World Scientific (1998).
- [3] J. Yang, Z. Deng, J. Wu. A Non-linear study on chaos in bridge structures based on chaos time sequence, *Intelligent Automation & Soft Computing*, **16**, (2010), pp. 705–713, <https://doi.org/10.1080/10798587.2010.10643113>
- [4] H. Salarieh, A. Alasty. Stabilizing unstable fixed points of chaotic maps via minimum entropy control. *Chaos Solitons Fract.*, **37**(3), (2008), pp. 763–769.
- [5] H. Salarieh, S.M.M. Kashani, G. Vossoughi, A. Alasty. Stabilizing unstable fixed points of discrete chaotic systems via quasi-sliding mode method. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14**(3), (2009), pp. 839–849.
- [6] K. Yagasaki, T. Uozumi. A new approach for controlling chaotic dynamical systems. *Phys. Lett. A*, **238**(6), (1998), pp. 349–357.

- [7] T. Wang, X. Wang, M. Wang. Chaotic control of Hénon map with feedback and nonfeedback methods. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16** (2011), pp. 3367–3374.
- [8] A.N. Michel , L. Hou, D. Liu. *Stability of Dynamical Systems: Continuous, Discontinuous, and Discrete Systems*. Boston, Birkhäuser (2007).